INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE JUIN 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES III

3 heures

On note $C(\mathbb{R}_+)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies et continue sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, à valeurs complexes.
Le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}_+)$ constitué des fonctions f de $C(\mathbb{R}_+)$ qui sont intégrables (c'est-à-dire telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge) sera noté $I(\mathbb{R}_+)$.
L'objet du problème est la recherche, pour certaines fonctions f de l'espace $I(\mathbb{R}_+)$, d'une valeur numérique approchée de l'intégrale

$$\hat{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-2i\pi tx}\ \mathrm{d}t$$

appelée transformée de Fourier de f en x, à l'aide du calcul d'une transformée de Fourier discrète, définie dans la deuxième partie du problème.
Les deux premières parties du problème sont entièrement indépendantes. La troisième partie utilise partiellement les résultats des deux premières parties.

Partie 1 Transformation de Fourier

1) Un exemple
Pour tout entier naturel n strictement positif, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f_n(t) = \exp\left(-\frac{t}{n}\right)$$

a) Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{e}^{-2i\pi tx}\ \mathrm{d}t$ converge et trouver sa valeur, que l'on notera $\hat{f}_n(x)$.

b) Établir l'existence et l'égalité des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f_n(t))^2\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}_n(x)\right|^2\ \mathrm{d}x$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions f de $C(\mathbb{R}_+)$ telles que la fonction $t \mapsto t\ f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $I(\mathbb{R}_+)$.

b) Montrer que l'application $f \mapsto \|f\| = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,|f(t)|\ \mathrm{d}t$ est une norme sur E.

c) Montrer que les fonctions f_n de la première question sont des éléments de E et les utiliser pour établir que la norme $\|\ \|$ n'est pas équivalente à la norme $\|\ \|_1 : f \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$.

3) Soit f un élément de E.

a) Montrer que l'application $\hat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-2i\pi tx}\ \mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $\hat{f}$ et sa dérivée sont bornées sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que la fonction $\hat{f}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

d) Trouver les rapports de Lipschitz des transformées de Fourier $\hat{f}_n$ des fonctions f_n, c'est-à-dire les plus petites constantes positives c_n vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left|\hat{f}_n(x) - \hat{f}_n(y)\right| \leqslant c_n\,|x - y|$$

4) On note F le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies, continues et bornées sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes et $\| \ \|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur F, définie par :

$$\forall g \in F, \|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| \, ; x \in \mathbb{R}\}$$

L'application de E dans F qui associe à toute fonction f sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est-elle continue lorsqu'on munit :

a) E de la norme $\| \ \|_1$ et F de la norme $\| \ \|_\infty$?

b) E de la norme $\| \ \|$ et F de la norme $\| \ \|_\infty$?

Partie 2 Transformation de Fourier discrète

Dans cette partie, on considère un nombre entier n supérieur ou égal à 3 et on note :

$$\omega_n = \exp\left(-\frac{2i\pi}{n}\right)$$

On désigne par Φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui associe à tout vecteur $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ le vecteur $\Phi_n(z) = \hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \ldots, \hat{z}_n)$ défini par :

$$\forall q \in [|1, n|], \hat{z}_q = \sum_{p=1}^{n} \omega_n^{(q-1)(p-1)} z_p$$

1) On note M_n la matrice de l'endomorphisme Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

a) Écrire la matrice M_3. On exprimera ses coefficients sous une forme aussi simple que possible, à l'aide du nombre complexe $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

b) Calculer les coefficients de la matrice-produit ${}^t\overline{M_n}.M_n$ (où ${}^t\overline{M_n}$ désigne la transposée de la matrice des conjugués des coefficients de M_n).

c) En déduire que Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$ et que, pour tout vecteur z de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\sum_{q=1}^{n} |\hat{z}_q|^2 = n \sum_{p=1}^{n} |z_p|^2$$

L'automorphisme Φ_n est appelé transformation de Fourier discrète de $\mathbb{C}^n$ et $\Phi_n(z)$ la transformée de Fourier discrète de z.

2) Algorithme de calcul de la transformée de Fourier discrète

On suppose que les coordonnées d'un vecteur $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ sont rangées dans une liste $U = [U[1], U[2], \ldots, U[n]]$.

a) On suppose ici que la valeur complexe ω_n a été affectée à une constante W.

Compléter la dernière ligne du programme suivant (écrit en pseudo-code) pour qu'à la fin de son exécution, la liste $V = [V[1], V[2], \ldots, V[n]]$ contienne les composantes de la transformée de Fourier discrète $\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \ldots, \hat{z}_n)$ du vecteur z :

Pour q variant de 1 à n, faire :
  $V[q] := U[1]$
  Pour p variant de 2 à n faire :
    $r := (p-1)(q-1)$
    $V[q] := V[q] +$?

b) On suppose maintenant que les n puissances successives distinctes 1, ω_n, ω_n^2, …, ω_n^{n-1} de ω_n ont été rangées dans une liste $W = [W[1], W[2], \ldots, W[n]]$ et on dispose d'une fonction *mod* qui fournit le reste $mod(u, v)$ de la division euclidienne d'un entier u par un entier naturel non nul v.

Compléter le programme suivant, pour qu'il fournisse le même résultat que le précédent :

Pour q variant de 1 à n, faire :
  $V[q] := U[1]$

Pour p variant de 2 à n faire :
$r := ?$
$V[q] := V[q] + W[r+1] * U[p]$
Quel avantage présente le nouvel algorithme par rapport au précédent ?

3) Proposer un algorithme de calcul de l'image d'un vecteur de $\mathbb{C}^n$ par l'automorphisme réciproque Φ_n^{-1} de Φ_n.

Partie 3 Approximations

Dans toute cette partie, on considère un élément f de E, dont on désire évaluer la transformée de Fourier $\hat{f}$ en tout point x de $\mathbb{R}$.

1) Pour tout nombre entier naturel N et tout nombre réel x, on note :
$$\hat{f}_{[N]}(x) = \int_0^N f(t)\ \mathrm{e}^{-2i\pi tx}\ \mathrm{d}t$$

a) Démontrer que la suite de fonction $\left(\hat{f}_{[N]}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\hat{f}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel N fixé, $\hat{f}_{[N]}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (on pourra utiliser une approximation convenable de f par des fonctions en escalier).

c) Justifier, pour tout réel strictement positif ε, l'existence d'un entier naturel N_0 tel que, pour tout entier N supérieur ou égal à N_0, on ait :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \left|\hat{f}_{[N]}(x) - \hat{f}(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant N \Rightarrow \left|\hat{f}(x)\right| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

2) a) Quelle est, pour tout nombre entier naturel N et tout nombre réel x fixés, la limite, quand le nombre entier n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{N}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{kN}{n}\right)\exp\left(-\dfrac{2i\pi kNx}{n}\right)$?

b) À quoi correspond, en liaison avec la deuxième partie du problème, l'expression précédente lorsque xN est un nombre entier ?

3) On suppose qu'on a pu déterminer un nombre entier N_0 vérifiant les propriétés de 1)c.
Expliquer comment on peut alors, à l'aide d'une transformée de Fourier discrète, obtenir une approximation de $\hat{f}(x)$ à ε près, en tout point x de $\mathbb{R}$.